# Eine affine Verallgemeinerung eines globalen Satzes von J. Steiner

Tölke, Jürgen

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 30, 1979, S.19-23

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

# Eine affine Verallgemeinerung eines globalen Satzes von J. Steiner

Von **Jürgen Tölke,** Salvador

Vorgelegt von Hans Robert Müller

In der euklidischen Ebene gilt nach Jakob STEINER [2, S.121]: Rollt eine geschlossene, konvexe Kurve $\mathbb{P}$ auf einer ihrer Tangenten, so wird bei einem Umlauf vom Polstrahl PX eine Fläche vom doppelten Inhalt der Fußpunktkurve von $\mathbb{P}$ bezüglich des bei der Rollung starr mitgeführten Punktes X ausgefegt.

Wir zeigen, daß dieser Sachverhalt auch für jene (regulären) elliptischen bzw. hyperbolischen Äquiaffinbewegungen zutrifft, die im Sinne von [4] *harmonisch* sind. Zentrale Hilfsmittel sind globale Eigenschaften der affinen symmetrischen Rollungen.

## § 1 Hilfsmittel

**1.** Unseren Untersuchungen legen wir nicht parabolische *Äquiaffinbewegungen* $\ddot{A}(t)$ $(t \in I \subset \mathbb{R},\ \ddot{A}(t) \in C^4)$ der reellen affinen Ebene zugrunde, die in dem Sinne *regulär* sind, daß (im projektiven Abschluß) an jeder Parameterstelle drei linear unabhängige Momentanpole derart existieren, daß der endliche Momentanpol P im Parameterintervall I nicht fest ist und an keiner Stelle die Tangenten, der von den Polen gebildeten *Gangpolbahn* $\mathbb{P}$ und *Rastpolbahn* $\mathbb{P}'$ mit einem Fernpol inzidieren.

Nach Einführung von Koordinaten haben wir die Matrixdarstellung

$$(1) \qquad x \mapsto \ddot{A}(t)x = x' = C'(t)x + c'(t), \quad \operatorname{Det} C'(t) = 1.$$

Bezeichnet (Ableitungen nach dem Scharparameter deuten wir durch Punkte an)

$$(2) \qquad B(t) := C\dot{C}' \quad \text{bzw.} \quad B'(t) := C'\dot{C} \quad \text{mit} \quad C(t) := (C')^{-1}$$

die infinitesimale Abbildungsmatrix von $\ddot{A}(t)$ bzw. dem zugehörigen inversen Zwanglauf, so gilt für alle $t \in I$

$$(3) \qquad \operatorname{Spur} B = \operatorname{Spur} B' = 0,\ b := \operatorname{Det} B \neq 0,\ \dot{p} \neq 0,\ \operatorname{Det}(\dot{p}, B\dot{p}) \neq 0,$$

wobei p bzw. p′ den Ortsvektor des Momentanpols im Gang- bzw. Rastsystem bezeichnet.

**2.** Für die Polbahnen gelten DGL-Systeme der Form [5]

$$(4) \qquad \ddot{p} = \sigma \dot{p} - \frac{1}{1-m} B\dot{p} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{p}' = \sigma \dot{p}' + \frac{m}{1-m} B'\dot{p}'.$$

Dabei ist $\sigma = \sigma(t)$ eine Parameterfunktion und die absolute Invariante $m = m(t) \neq 1$ der Ähnlichkeitsmodul, der bezüglich P zentrisch ähnlichen *Polbahnkrümmungskegelschnitte* [3,6].

Im folgenden sei $\ddot{A}(t)$ als *harmonisch* [4] vorausgesetzt, d.h. geometrisch – da nicht beide Polbahnkrümmungskegelschnitte entarten können –, daß der Hüllpunkt der Polbahnnormalen

$$\mathrm{Det}(n-p, B\dot{p}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Det}(n'-p', B'\dot{p}') = 0$$

mit dem (existierenden) Mittelpunkt[1]) des betreffenden Polbahnkrümmungskegelschnittes zusammenfällt. Setzen wir noch

$$\dot{B}\dot{p} = b_1\dot{p} + b_2 B\dot{p} \quad \text{oder} \quad \dot{B}'\dot{p}' = -b_1\dot{p}' + b_2 B'\dot{p}', \tag{5}$$

so ist $\ddot{A}(t)$ genau dann harmonisch, wenn

$$b_1 = 0 \tag{6}$$

gilt.[2])

## § 2 Symmetrische Rollungen

**1.** Unter einer *symmetrischen Rollung* verstehen wir eine nicht parabolische reguläre harmonische Äquiaffinbewegung mit $m = -1$. Wie im Euklidischen gilt auch hier die Basiseigenschaft von L. A. J. QUETELET [7].

*SATZ 1. Eine nicht parabolische reguläre Äquiaffinbewegung mit wendepunktfreien Polbahnen ist genau dann eine symmetrische Rollung, wenn der in Richtung der Polbahnnormalen an der Polbahntangente gebildete Spiegelpunkt $X^*$ eines jeden gangfesten Punktes X rastfrei ist.*

Zum Beweis gehen wir von der Darstellung

$$x^{*\prime} = x' + 2\,\frac{\mathrm{Det}(x'-p', p')}{\mathrm{Det}(\dot{p}', B'\dot{p}')}\, B'\dot{p}' \tag{1}$$

des Spiegelpunktes $X^*$ von X aus. Der Punkt Y mit der Darstellung

$$y' = p' + y_1\,\dot{p}' - \frac{y_2}{\sqrt{eb}}\, B'\dot{p}', \quad e := \operatorname{sgn} b \tag{2}$$

ist genau dann *gang-* bzw. *rastfest*, wenn (man beachte $B'^2 = -bE$, E = Einheitsmatrix)

$$\begin{gathered} -\dot{y}_1 = y_1 + 1 + \left(b_1 + \frac{b}{1-m}\right)\frac{y_2}{\sqrt{eb}}, \quad \dot{y}_2 = \frac{\sqrt{eb}}{1-m}\, y_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{\dot{b}}{b} - \sigma - b_2\right) y_2 \\ \text{bzw.} \\ -\dot{y}_1 = y_1 + 1 + \left(b_1 + \frac{mb}{1-m}\right)\frac{y_2}{\sqrt{eb}}, \quad \dot{y}_2 = \frac{m\sqrt{eb}}{1-m}\, y_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{\dot{b}}{b} - \sigma - b_2\right) y_2 \end{gathered} \tag{3}$$

---

1) Nach [6, S. 68] gilt für diese Mittelpunkte im Gangsystem die Darstellung $m_p = p - (1-m)/b\; B\dot{p}$ bzw. $m_{p'} = p - (1-m)/bm\; B\dot{p}$.

2) Um wesentlich affin zu bleiben, haben wir dann auf $\dot{b} - 2bb_2 \neq 0$ zu achten.

gilt. Also ist $X^*$ genau dann für alle Punkte $X$ rastfest, wenn die Beziehungen

$$m+1=b_1=0$$

erfüllt sind. Q.E.D.

**2.** Einige Eigenschaften der symmetrischen Rollungen wurden in [4,8] bewiesen. Darüber hinaus vermerken wir – wie man an Hand von [1, S. 14] sofort verifiziert –: *Die Polbahnen symmetrischer Rollungen haben* (in entsprechenden Punkten) *dieselbe Affinkrümmung.* Ferner haben wir nach [5, S. 546]: *Für die LIEschen Bogenelemente ds, ds' der Gang- bzw. Rastpolbahn symmetrischer Rollungen gilt*[3])

(4) $$ds+ds'=0.$$

**3.** Für das Folgende benötigen wir einige grundlegende Beziehungen. Dabei bezeichne $X$ ($\neq P$) stets einen beliebigen gangfesten Punkt und $X^*$ den nach Satz 1 rastfesten Spiegelpunkt. Nach (2.1) gilt

(5) $$\operatorname{Det}(p-x,\dot{p}) = -\operatorname{Det}(p'-x^{*\prime},\dot{p}').$$

Ist $F(\mathbf{P}',X^*)$ die Fußpunktkurve der Rastpolbahn $\mathbf{P}'$bezüglich $X^*$ in Richtung der Polbahnnormalen, also nach (2.1)

$$f'(\mathbf{P}',X^*)=x^{*\prime}-\frac{\operatorname{Det}(x'-p',\dot{p}')}{\operatorname{Det}(\dot{p}',B'\dot{p}')}\,B'\dot{p}',$$

so besteht wegen $\dot{x}'=-B'(x'-p')$ und

$$x'-p'=\frac{\operatorname{Det}(x'-p',B'\dot{p}')}{\operatorname{Det}(\dot{p}',B'\dot{p}')}\,\dot{p}'-\frac{\operatorname{Det}(x'-p',\dot{p}')}{\operatorname{Det}(\dot{p}',B'\dot{p}')}\,B'\dot{p}'$$

die Beziehung

(6) $$4\operatorname{Det}(f'(\mathbf{P}',X^*)-x^{*\prime},\dot{f}'(\mathbf{P}',X^*)) = \operatorname{Det}(x'-x^{*\prime},\dot{x}').$$

Bezeichnet andererseits $F(\mathbf{P},X)$ die Fußpunktkurve der Gangpolbahn $\mathbf{P}$ bezüglich $X$ in Richtung der Polbahnnormalen, also nach (2.1)

$$f(\mathbf{P},X)=x+\frac{\operatorname{Det}(x-p,\dot{p})}{\operatorname{Det}(\dot{p},B\dot{p})}\,B\dot{p},$$

so folgt analog die Relation

(7) $$\operatorname{Det}(f(\mathbf{P},X)-x,\dot{f}(\mathbf{P},X)) = -\operatorname{Det}(f'(\mathbf{P}',X^*)-x^{*\prime},\dot{f}'(\mathbf{P}',X^*)).$$

**4.** Wir wollen hieraus wichtige Folgerungen ziehen. Dazu betrachten wir eine *geschlossene* symmetrische Rollung. Nach unseren Voraussetzungen ist die Gangpolbahn eine *Eilinie* $\mathbf{P}$. Bezeichnet $L_P$ die affine Gesamtlänge von $\mathbf{P}$, so gilt für die Polbahnflächen $A_P$ bzw. $A_{P'}$ nach (4) und (5)

$$2A_P=\int_0^{L_P}\operatorname{Det}(p-x,\frac{dp}{ds})\,ds = -\int_0^{-L_P}\operatorname{Det}(p'-x^{*\prime},\frac{dp'}{ds'})\,ds',$$

[3]) Diese Eigenschaft gilt bereits für nicht parabolische reguläre Äquiaffinbewegungen mit $m=-1$.

d.h.: *Für die Polbahnflächen* $A_P, A_{P'}$ *einer geschlossenen symmetrischen Rollung gilt*

(5′) $\quad A_P + A_{P'} = 0.$

Ferner folgt mit dem *Bahnflächeninhalt* $A_Y$

$$2\,A_Y = \int_0^{L_p} \mathrm{Det}\,(y', \frac{dy'}{ds'})\,ds$$

der vom gangfesten Punkt Y beschriebenen Bahnkurve durch Integration von (6): *Rollt die Gangpolbahn* $\mathbb{P}$ *einer geschlossenen symmetrischen Rollung einmal affin auf* $\mathbb{P}'$ *ab, und bezeichnet* $A_X$ *bzw.* $A_{F(\mathbb{P}',X^*)}$ *die Flächeninhalte der Bahnkurve* $x'$ *bzw. der Fußpunktkurve* $f'(\mathbb{P}', X^*)$ *der Rastpolbahn* $\mathbb{P}'$ *bezüglich dem Spiegelpunkt* $X^*$ *in Richtung der Polbahnnormalen, so gilt*

(6′) $\quad 4\,A_{F(\mathbb{P}',X^*)} = A_X.$

Analog liefert (7): *Bezeichnet* $A_{F(\mathbb{P},X)}$ *den Flächeninhalt der Fußpunktkurve* $F(\mathbb{P}, X)$ *der Gangpolbahn* $\mathbb{P}$ *einer geschlossenen symmetrischen Rollung bezüglich des gangfesten Punktes* X *in Richtung der Polbahnnormalen, so gilt*

(7′) $\quad A_{F(\mathbb{P},X)} + A_{F(\mathbb{P}',X^*)} = 0.$

## § 3 Das affine Analogon eines Satzes von J. Steiner

**1.** In [9] haben wir STEINER Formeln für geschlossene Äquiaffinbewegungen betrachtet. Liegt eine *offene* nicht parabolische reguläre Äquiaffinbewegung zuzugrunde und bezeichnet $A_X^P$ die von der Verbindungsstrecke PX des Momentanpols P mit dem gangfesten Punkt X überstrichene Fläche, so gilt analog zu 2, S.118

(1) $$2\,A_X^P = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Det}\,(x'-p', \dot{x}')\,dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Det}\,(p-x, \dot{p})\,dt.$$

**2.** $\ddot{A}\,(\mathbb{P}/\mathbb{P}')$ sei eine nicht parabolische reguläre harmonische Äquiaffinbewegung mit einer *Eilinie* als Gangpolbahn $\mathbb{P}$ und einer Geraden $\mathbb{P}'$ als Rastpolbahn. $L_p$ bezeichne die affine Gesamtlänge von $\mathbb{P}$. Gemäß (1.4) gilt für die Polbahnen $\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ von $\ddot{A}(t)$

(2) $\quad \ddot{p} = \sigma p - B\dot{p} \quad$ bzw. $\quad \ddot{p}' = \sigma \dot{p}'.$

Daneben betrachten wir den über die Polbahnen $\mathbb{P}_1 := \mathbb{P}, \mathbb{P}_1'$ durch

(3) $\quad \ddot{p}_1 = \sigma \dot{p}_1 - \frac{1}{2} B_1 \dot{p}_1 \quad$ bzw. $\quad \ddot{p}_1' = \sigma p_1' - \frac{1}{2} B_1 \dot{p}_1'$

mit

(4) $\quad \dot{C}_1' = 2C_1'B, \quad \mathrm{Det}\, C_1'(t) = 1$

definierten Zwanglauf $\ddot{A}_1$. Wegen (1.5) und (4) ist mit Ä auch $\ddot{A}_1$ harmonisch, so daß die Äquiaffinbewegung $\ddot{A}_1$ offenbar eine *geschlossene symmetrische Rollung* ist.

**3.** Beziehen wir den Zwanglauf Ä auf den LIEschen Bogenlängenparameter s von $\mathbb{P}$, so folgt nach kurzer Zwischenrechnung vermöge (2.2), (2.5) und (1), wenn $\mathbb{P}$ einmal auf $\mathbb{P}'$ affin abrollt, für die vom Polstrahl PX überstrichene Fläche

(5) $$A_X^P = -\frac{1}{2}\int_0^{L_P}(x_1^2 + ex_2^2)\,ds - A_P\,.$$

Nunmehr betrachten wir die geschlossene symmetrische Rollung $\ddot{A}_1$. Die Anfangslage sei wieder $s = 0$. Also gilt nach (1), wenn $\mathbb{P}_1$ einmal affin auf $\mathbb{P}_1'$ abrollt, für die vom Polstrahl PX ausgefegte Fläche $\tilde{A}_X^P$

(6) $$\tilde{A}_X^P = -\int_0^{L_P}(x_1^2 + ex_2^2)\,ds - A_P\,.$$

Andererseits folgt mit (1), (2.5′) und der STEINER-Formel [9, Formel (13)]

$$A_X = A_{P_1'} - A_P + \frac{1}{2}\int_0^{L_P}\mathrm{Det}\left(x'-p', \frac{dx'}{ds}\right) ds$$

die Beziehung

(7) $$\tilde{A}_X^P = A_X + A_P\,.$$

Die Relationen (5), (6), (7), (2.6′) und (2.7′) liefern damit

$$2\,A_X^P = \tilde{A}_X^P - A_P = A_X = 4\,A_{F(\mathbb{P}_1', X^*)} = -4\,A_{F(\mathbb{P}, X)}$$

also

(8) $$A_X^P = -2\,A_{F(\mathbb{P}, X)}\,.$$

*SATZ 2. Rollt bei einer nicht parabolischen regulären harmonischen Äquiaffinbewegung eine konvexe Kurve* $\mathbb{P}$ *auf einer ihrer Tangenten einmal affin ab, so wird vom Polstrahl* PX *eine Fläche vom doppelten Inhalt der Fläche der Fußpunktkurve* $F(\mathbb{P}, X)$ *von* $\mathbb{P}$, *bezüglich des bei der Rollung fest mitgeführten Punktes* X *in Richtung der Polbahnnormalen, ausgefegt.*

## Literatur


[1] BLASCHKE, W.: Differentialgeometrie II. Berlin 1923.

[2] BLASCHKE, W. und Müller, H.R.: Ebene Kinematik. München 1956.

[3] MÜLLER, H.R.: Die Formel von Euler-Savary in der affinen Kinematik. Arch. Math. **10** (1959), 71–80.

[4] TÖLKE, J.: Ebene projektive Kinematik I, II, III. Math. Nachr. **63**, 167–196, **68**, 221–237 (1975).

[5] TÖLKE, J.: Eine äquiaffine Charakterisierung der euklidischen Bewegungen vermöge einander oskulierender Hüllkurvenpaare. Arch. Math. **28** (1977), 544–549.

[6] TÖLKE, J.: Affine ebene Kinematik. Diss. Karlsruhe 1967.

[7] TÖLKE, J.: Ebene euklidische und sphärische symmetrische Rollungen. Mech. Mach. Theory **13** (1978), 187–198.

[8] TÖLKE, J.: Symmetrische Rollung bei den ebenen nicht parabolischen M-Affinitätsvorgängen. Arch. Math. **21** (1970), 317–325.

[9] TÖLKE, J.: STEINER-Formeln für die Bahnflächen geschlossener Äquiaffinbewegungen. Erscheint in den Sb. Östterr. Ak. Wiss. Wien.